Probe klausur 07/08

Aufgabe 7

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ für die durch $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{x^2-1})$ gegebene Funktion an. In welchen Punkten ist f stetig?

Hinweis: Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$ sind $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n \exp(-x)$.

Beweisen Sie, dass f in $x_0 = n$ ein lokales Maximum hat.

WS 07/08

Aufgabe 7

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für alle $x \in I \cap \mathbb{Q}$ sei $f(x) = g(x)$.

Beweisen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\cos(x)}{x})}$ definiert ist. Berechnen Sie $f'(x)$.

[*8 Punkte*]

Nachklausur 07/08

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x - \exp(-x)$.

1. Beweisen Sie, dass f injektiv ist.
2. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x = \exp(-x)$ genau eine reelle Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$.

Hinweis: Es sind $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[*12 Punkte*]

WS 08/09

Aufgabe 5

Finden Sie alle Stellen, in denen die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ ein lokales Minimum oder Maximum annimmt. (Hinweis: Für $x = \frac{\pi}{3}$ gilt $\cos(x) = \frac{1}{2}$.)

[*12 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 2^x - x - 3$ für alle $x \in [0, 3]$, mindestens eine Nullstelle besitzt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $0 < a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\int_a^b x^2 \ln(x) dx$.

[*6 Punkte*]

SS 09

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} - \ln(x)$, im Intervall $[1, e]$ genau eine Nullstelle hat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (2x^2 - x - 1)\exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie f auf lokale Minima und Maxima.

[*10 Punkte*]

WS 09/10

Aufgabe 4

Sei $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $x \longmapsto |x - 1| + 3x - x^2$. Beweisen Sie, dass f in $[0, 4]$ eine Nullstelle besitzt.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum Sie bei der Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{\sin^2(x)}$$

die Regel von de l'Hospital verwenden dürfen, und berechnen Sie diesen Grenzwert.

[*8 Punkte*]

SS 10

Aufgabe 5

Sei $f : [0, \frac{1}{100}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \cos(200x) - \exp(x) + 1$ für $x \in [0, \frac{1}{100}]$.

Beweisen Sie, dass f in $[0, \frac{1}{100}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos(\frac{x}{2})\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von f in $a = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

[*8 Punkte*]

WS 10/11

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum Sie bei der Berechnung des folgenden Grenzwertes die Regel von de l'Hospital anwenden dürfen, und berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

[*4 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ für alle $x \in [0, 1]$. Bestimmen Sie alle $x \in [0, 1]$, bei denen Minima oder Maxima vorliegen.

[*10 Punkte*]

SS 11

Aufgabe 6

Berechnen Sie

1. die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{\sin(2x)^2}$.
2. das Integral $\int\limits_a^b x^2 \cos(x) dx$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = ax - \sqrt{x}$.

Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*8 Punkte*]

WS 11/12

Aufgabe 6

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx \, .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = xe^{-x}$. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*8 Punkte*]

SS 12

Aufgabe 8

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

Beweisen Sie, dass $\exp(x)(y-x) < \exp(y) - \exp(x) < \exp(y)(y-x)$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

Untersuchen Sie, für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ stetig beziehungsweise differenzierbar ist.

[*8 Punkte*]

WS 12/13

Aufgabe 5

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, \ln(x)\, dx .$$

[*10 Punkte*]

SS 13

Aufgabe 5

Berechnen Sie

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)^2}{3n^5 - 2\pi}.$$

(b)

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx.$$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass genau ein $x \in [0,1]$ existiert mit

$$1 - x^2 = e^{x-1}.$$

[*8 Punkte*]

WS 13/14

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)e^{-x}$, genau ein lokales Maximum in $(0,\infty)$ hat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx\ .$$

[*8 Punkte*]

SS 14

Aufgabe 7

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in allen Punkten in (a,b) differenzierbar. Es gelte

$$f(a) = g(a) \text{ und } f'(x) < g'(x) \text{ für alle } x \in (a,b).$$

Beweisen Sie, dass $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b]$ gilt.

[*10 Punkte*]

WS 14/15

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ und deren Art.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx\ .$$

[*10 Punkte*]

SS 15

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 2\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folgende Tabelle könnte für die Bearbeitung der Aufgabe nützlich sein und darf ohne Begründung verwendet werden:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in (a, b)$ gibt es ein $y \in (x, b]$ mit $f(y) > f(x)$.

(ii) Für a gibt es kein $y \in (a, b]$ mit $f(y) > f(a)$.

Beweisen Sie: Dann gilt

1. f nimmt das Maximum in a an, d.h. für jedes $x \in [a, b]$ gilt $f(x) \leq f(a)$.
2. f nimmt das Maximum in keinem Punkt $c \in (a, b)$ an.
3. f nimmt das Maximum auch in b an.

[*3 + 3 + 6 = 12 Punkte*]

WS 15/16

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = x \cdot \cos(x)\,,$ im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ genau ein lokales Maximum hat.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$a) \int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx \quad , \qquad b) \int_2^3 \frac{x+1}{x-1}\,dx\ .$$

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

SS 16

Aufgabe 6

Sei $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in D$.

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f im Intervall $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(c) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von f in $x_0 = 1$.

[*4 + 5 + 3 = 12 Punkte*]

WS 16/17

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen Minima bzw. Maxima der Funktion $f : I \to \mathbb{R},\ I = [0, \infty)\,,\ f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall I streng monoton und differenzierbar; es seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) = g(b) = 0$. Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in (a, b)$ gibt mit

$$\frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\ .$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\ .$$

[*10 Punkte*]

SS 17

Aufgabe 5 ✓

Welche der folgenden Mengen sind nach unten bzw. oben beschränkt, welche besitzen ein Minimum oder ein Maximum?

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 > 0\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| - 1 < 0\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 \leq 1\}$

[*2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte*]

WS 17/18

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} .$$

i) Zeigen Sie: f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

ii) Zeigen Sie: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

iii) Ist f' stetig in $x_0 = 0$?

[*4 + 4 + 6 = 14 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für} \quad x \geq -1\,, \; n \in \mathbb{N}$$

nicht mit vollständiger Induktion, sondern mit den Mitteln der Differentialrechnung (angewendet auf die Differenz der beiden Seiten).

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx\ .$$

[*8 Punkte*]

SS 18

Aufgabe 5

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_a : [0, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig?

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

[*8 Punkte*]

WS 18/19

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $e^{-x} = \frac{x^2}{x^2+1}$. Geben Sie ein Intervall mit Länge ≤ 1 an, in dem dieses x liegt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx \ .$$

[*8 Punkte*]

SS 19

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^3 |\sin(\frac{1}{x})| & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Ist f stetig?

Aufgabe 6

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $a < x < b$. Zeigen sie, dass f injektiv ist.

(Hinweis: Mittelwertsatz)

[*10 Punkte*]